Title	ある種のオービフォールドの共形元 (有限群とその表現,頂点作用素代数,代数的組合せ論の研究)
Author(s)	山田, 裕理
Citation	数理解析研究所講究録 (2014), 1872: 8-19
Issue Date	2014-01
URL	http://hdl.handle.net/2433/195497
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第1872巻 2014年 8-19

ある種のオービフォールドの共形元

一橋大学大学院経済学研究科　山田裕理[1]
Hiromichi Yamada
Graduate School of Economics,
Hitotsubashi University[2]

1　はじめに

V を頂点作用素代数とする．V の全自己同型群 $\mathrm{Aut}\,V$ の任意の部分群 G による固定点全体 $V^G=\{v\in V\,|\,gv=v,\ ^{\forall}g\in G\}$ は V の部分頂点作用素代数であるが，これを G によるオービフォールドという．オービフォールドは既知の頂点作用素代数から新しい頂点作用素代数を構成する主要な方法のひとつであるが，一般論があまり整備されていないこともあり，比較的簡単な V と G が与えられた場合でも V^G の性質を調べることは容易ではない．

頂点作用素代数 U の n 個のテンソル積 $U^{\otimes n}$ には，各テンソル成分の置換により n 次対称群 Sym_n が頂点作用素代数の自己同型群として作用する．Sym_n の任意の部分群 G によるオービフォールドは置換オービフォールドと呼ばれ，物理では1990年頃から研究されている (たとえば [2] の引用文献を参照のこと)．置換オービフォールドは，基本的なオービフォールドのひとつである．

本稿で考察するのは，U が A_1 型ルート格子から定義される頂点作用素代数 V_{A_1} で，G が長さ n の巡回置換で生成される巡回群の場合の置換オービフォールド $(V_{A_1}^{\otimes n})^G$ のある部分頂点作用素代数である．より詳しく，この部分頂点作用素代数は，$V_{A_1}^{\otimes n}$ におけるアフィン頂点作用素代数 $L_{\widehat{sl}_2}(n,0)$ のコミュタント M の G によるオービフォールド M^G である．M^G を調べることは難しいが，ここでは第1段階として M^G のウエイト2の部分空間 $M^G_{(2)}$ のなす Griess 代数の構造，および共形元を互いに直交するヴィラソロ元の和として表すことを紹介する．

謝辞　M^G のヴィラソロ元の分類に関して，一部の計算は横山和弘氏により計算機代数システム Risa/Asir を用いて行われた．また，安部利之氏には置換オービフォールドについて文献を含め基礎的なことを教えていただいた．両氏に感謝いたします．

[1]本研究は学術研究助成基金助成金 基盤研究 (C) 23540009 の助成を受けたものである．
[2]e-mail: yamada@econ.hit-u.ac.jp

2 記号の準備と基本事項

頂点作用素代数 $V=(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ に関する記号は [8, 11] に従う．$v\in V$ に対する頂点作用素は $Y(v,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}$ のように表す．$v_n\in\operatorname{End}V$ を $Y(v,z)$ あるいは v の成分作用素という．本稿で扱う頂点作用素代数 V はすべて CFT 型，すなわち $V=\oplus_{n\geq 0}V_{(n)}$ で $V_{(0)}=\mathbb{C}\mathbf{1}$ である．$V_{(n)}$ をウエイト n の部分空間といい，$V_{(n)}$ の元をウエイト n の元という．$v\in V_{(n)}$ に対して，$\operatorname{wt}v=n$ で v のウエイトを表す．

ω は共形元と呼ばれるウエイト 2 の特別な元で，$L(n)=\omega_{n+1}\in\operatorname{End}V$, $n\in\mathbb{Z}$ は交換関係

$$[L(m),L(n)]=(m-n)L(m+n)+\tfrac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}c \tag{2.1}$$

を満たし，V 上のヴィラソロ代数の表現を与える．c は ω あるいは頂点作用素代数 V の中心電荷と呼ばれる定数である．

一般に，頂点作用素代数 V には共形元 ω 以外にも，その成分作用素が V 上のヴィラソロ代数の表現を与えるような元が存在する．そのような元をヴィラソロ元と呼ぶ．より正確には，ウエイト 2 の元 $e\in V_{(2)}$ であって $e_{n+1}\in\operatorname{End}V$, $n\in\mathbb{Z}$ が (2.1) 式と同様の中心電荷 c' のヴィラソロ代数の表現を与えるものを，中心電荷 c' のヴィラソロ元という．e の中心電荷を $c(e)$ で表す．e で生成される部分頂点作用素代数 $\operatorname{Vir}(e)$ は単純な頂点作用素代数とは限らないが，単純な頂点作用素代数の場合には $\operatorname{Vir}(e)$ は中心電荷 c' のヴィラソロ頂点作用素代数 $\mathcal{L}(c',0)$ と同型である．このような元 e を単純なヴィラソロ元という．本稿で扱うヴィラソロ元はすべて単純なヴィラソロ元である．2 つのヴィラソロ元 e と f について，$e_1f=0$ が成り立つとき e と f は互いに直交するという．この場合は，e と f で生成される V の部分頂点作用素代数は $\operatorname{Vir}(e)$ と $\operatorname{Vir}(f)$ のテンソル積 $\operatorname{Vir}(e)\otimes\operatorname{Vir}(f)$ になる．中心電荷が $\frac{1}{2}$ のヴィラソロ元は特に有用で，イジング元と呼ばれる [12]．

ここで，パラフェルミオン頂点作用素代数の定義を一般の形で述べておく．$\mathfrak{g}$ を有限次元単純リー代数，$\mathfrak{h}$ をそのカルタン部分代数とする．また $\mathfrak{g}$ のアフィンリー代数を $\widehat{\mathfrak{g}}$ で表す．正の整数 k に対して，レベル k で最高ウエイト 0 の既約最高ウエイト $\widehat{\mathfrak{g}}$-加群，すなわち $\widehat{\mathfrak{g}}$ の可積分表現 $L_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)$ は，単純頂点作用素代数の構造を持つ．頂点作用素代数 $L_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)$ の中心電荷は $\frac{k\dim\mathfrak{g}}{k+h^\vee}$ である．ここで，$h^\vee$ は $\mathfrak{g}$ の双対コクセター数である．カルタン部分代数 $\mathfrak{h}$ で生成される $L_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)$ の部分頂点作用素代数を $M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0)$ で表す．これはハイゼンベルグ頂点作用素代数で，その中心電荷は $\mathfrak{h}$ の次元 $\dim\mathfrak{h}$，すなわちリー代数 $\mathfrak{g}$ の階数に等しい．$L_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)$ における $M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0)$ のコミュタントを $K(\mathfrak{g},k)$ で表す:

$$\begin{aligned} K(\mathfrak{g},k) &= \operatorname{Com}_{L_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)}(M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0)) \\ &= \{v\in L_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)\,|\,u_nv=0,\ {}^\forall u\in M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0),\ n\geq 0\} \end{aligned}$$

$K(\mathfrak{g},k)$ をレベル k の $\mathfrak{g}$ 型パラフェルミオン頂点作用素代数と呼ぶ [7]．$K(\mathfrak{g},k)$ の

中心電荷は，$L_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)$ の中心電荷と $M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0)$ の中心電荷の差

$$\tfrac{k\dim\mathfrak{g}}{k+h^\vee}-\dim\mathfrak{h}$$

である．$L_{\widehat{\mathfrak{g}}}(k,0)\supset K(\mathfrak{g},k)\otimes M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(k,0)$ に注意する．

A_n 型ルート格子を簡単に A_n で表すことにする．格子 A_n から定義される頂点作用素代数 V_{A_n} は，$\widehat{sl}_{n+1}$ のレベル 1 の可積分表現 $L_{\widehat{sl}_{n+1}}(1,0)$ のなす頂点作用素代数に同型である．$n=1$ の場合に，$V_{A_1}\cong L_{\widehat{sl}_2}(1,0)$ のテンソル積の内部にレベルが 1 より大きい $\widehat{sl}_2$ の可積分表現を構成するために，α_0, α_1, ..., α_ℓ は $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=2\delta_{ij}$ を満たすものとし，これらで生成される格子 $L=\mathbb{Z}\alpha_0+\cdots+\mathbb{Z}\alpha_\ell$ を考える．L は $\ell+1$ 個の A_1 型ルート格子 $\mathbb{Z}\alpha_0$, ..., $\mathbb{Z}\alpha_\ell$ の直交和 $L\cong A_1^{\oplus\ell+1}$ であり，格子 L から定義される頂点作用素代数 V_L は A_1 型ルート格子から定義される頂点作用素代数 V_{A_1} の $\ell+1$ 個のテンソル積になる:

$$V_L=V_{A_1}^{\otimes\ell+1}=L_{\widehat{sl}_2}(1,0)^{\otimes\ell+1}$$

α_0, α_1, ..., α_ℓ の和を γ とおく:

$$\gamma=\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_\ell$$

さらに，V_L の元

$$\begin{aligned}H&=\gamma(-1)\mathbf{1},\\E&=e^{\alpha_0}+e^{\alpha_1}+\cdots+e^{\alpha_\ell},\\F&=e^{-\alpha_0}+e^{-\alpha_1}+\cdots+e^{-\alpha_\ell}\end{aligned}$$

を考える．H, E, F で生成される V_L の部分頂点作用素代数 $V^{\mathrm{aff}}=\langle H,E,F\rangle$ は，$L_{\widehat{sl}_2}(\ell+1,0)$ に同型である:

$$V_L\supset V^{\mathrm{aff}}=\langle H,E,F\rangle\cong L_{\widehat{sl}_2}(\ell+1,0)$$

$e^\gamma,e^{-\gamma}\in V^{\mathrm{aff}}$ であり，この 2 つの元で生成される部分頂点作用素代数は，γ で生成される階数 1 の格子 $\mathbb{Z}\gamma$ から定義される頂点作用素代数 $V_{\mathbb{Z}\gamma}$ に同型である:

$$V^{\mathrm{aff}}\supset\langle e^\gamma,e^{-\gamma}\rangle=V_{\mathbb{Z}\gamma}$$

H で生成される V^{aff} の部分頂点作用素代数 $M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(\ell+1,0)$ は $V_{\mathbb{Z}\gamma}$ に含まれるが，両者の共形元は一致するので，V^{aff} における $V_{\mathbb{Z}\gamma}$ のコミュタントは $M_{\widehat{\mathfrak{h}}}(\ell+1,0)$ のコミュタント，すなわちレベル $\ell+1$ の sl_2 型パラフェルミオン頂点作用素代数 $K(sl_2,\ell+1)$ に等しい:

$$\mathrm{Com}_{V^{\mathrm{aff}}}(V_{\mathbb{Z}\gamma})=K(sl_2,\ell+1)$$

$K(sl_2, \ell+1)$ の中心電荷は $\frac{3(\ell+1)}{\ell+3} - 1 = \frac{2\ell}{\ell+3}$ で,

$$V^{\text{aff}} \supset K(sl_2, \ell+1) \otimes V_{\mathbb{Z}\gamma}$$

である.

次に，γ と直交する L の元全体 $L' = \{\alpha \in L \,|\, \langle \alpha, \gamma \rangle = 0\}$ を考える．これは $\alpha_{i-1} - \alpha_i$, $1 \le i \le \ell$ で生成される L の部分格子で，A_ℓ 型ルート格子を $\sqrt{2}$ 倍した格子に同型である:

$$L' = \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}\{\alpha_{i-1} - \alpha_i \,|\, 1 \le i \le \ell\} \cong \sqrt{2}A_\ell$$

$L \supset L' \oplus \mathbb{Z}\gamma$ であり，L の $L' \oplus \mathbb{Z}\gamma$ による剰余類分解は $L = \cup_{i=0}^{\ell}(i\alpha_0 + L' \oplus \mathbb{Z}\gamma)$ で与えられる．また格子 L' から定義される頂点作用素代数 $V_{L'}$ は，V_L における $V_{\mathbb{Z}\gamma}$ のコミュタントに等しい:

$$V_{L'} = \operatorname{Com}_{V_L}(V_{\mathbb{Z}\gamma})$$

$V_L \supset V_{L'} \otimes V_{\mathbb{Z}\gamma}$ であることに注意する.

$V_L \supset V^{\text{aff}}$ で $\operatorname{Com}_{V^{\text{aff}}}(V_{\mathbb{Z}\gamma}) = K(sl_2, \ell+1)$ なので，$V_{L'} \supset K(sl_2, \ell+1)$ である．$V_{L'}$ における $K(sl_2, \ell+1)$ のコミュタントを M とおく:

$$M = \operatorname{Com}_{V_{L'}}(K(sl_2, \ell+1))$$

M の中心電荷は $\ell - \frac{2\ell}{\ell+3} = \frac{\ell(\ell+1)}{\ell+3}$ で,

$$V_{L'} \supset M \otimes K(sl_2, \ell+1)$$

である.

$V_{L'} = \operatorname{Com}_{V_L}(V_{\mathbb{Z}\gamma})$, $M = \operatorname{Com}_{V_{L'}}(K(sl_2, \ell+1))$ であり，さらに $K(sl_2, \ell+1) \otimes V_{\mathbb{Z}\gamma}$ は V^{aff} の部分頂点作用素代数でその共形元は V^{aff} の共形元と一致するので，M は V_L における V^{aff} のコミュタントでもある:

$$M = \operatorname{Com}_{V_L}(V^{\text{aff}})$$

$A_\ell \oplus A_\ell \supset \sqrt{2}A_\ell$ により

$$V_{A_\ell} \otimes V_{A_\ell} \supset V_{L'}$$

であること，および

$$V_{A_\ell} \otimes V_{A_\ell} = L_{\widehat{sl}_{\ell+1}}(1,0)^{\otimes 2} \supset L_{\widehat{sl}_{\ell+1}}(2,0)$$

であることに注意する.

格子 $L = \mathbb{Z}\alpha_0 + \cdots + \mathbb{Z}\alpha_\ell$ に対して，巡回置換

$$\tau : \alpha_0 \mapsto \alpha_1 \mapsto \cdots \mapsto \alpha_\ell \mapsto \alpha_0 \tag{2.2}$$

は内積を保つ L の自己同型であり，頂点作用素代数 V_L の位数 $\ell+1$ の自己同型を引き起こす．その自己同型を同じ記号 τ で表す．τ による固定点全体

$$V_L^\tau = \{v \in V_L \mid \tau v = v\}$$

すなわち τ による V_L のオービフォールドは，V_L の部分頂点作用素代数である．

H, E, F の定義より明らかにこれらは τ により固定されるので，$V_L^\tau \supset V^{\mathrm{aff}}$ である．また γ も τ により固定されるので，L' と $V_{L'}$ は τ-不変である．τ の $V_{L'}$ における固定点全体を $V_{L'}^\tau$ で表す．$M = \mathrm{Com}_{V_L}(V^{\mathrm{aff}})$ の τ による固定点を考えて，$M^\tau = \mathrm{Com}_{V_L^\tau}(V^{\mathrm{aff}})$ が得られる．

これまでに現れた頂点作用素代数の包含関係を図示すると，次のようになる．

$$\begin{array}{ccccccccccc}
V_{A_\ell}\otimes V_{A_\ell} & & & & V_L = V_{A_1}^{\otimes \ell+1} = L_{\widehat{sl}_2}(1,0)^{\otimes \ell+1} & & & & & & \\
 & \diagdown & & / & & \diagdown & & & & & \\
 & & V_{\sqrt{2}A_\ell} = V_{L'} & & & & V_L^\tau & & & & \\
 & / & & \diagdown & & / & & \diagdown & & & \\
M & & & & V_{L'}^\tau & & & & V^{\mathrm{aff}} = L_{\widehat{sl}_2}(\ell+1,0) & & \\
 & \diagdown & & / & & \diagdown & & / & & \diagdown & \\
 & & M^\tau & & & & K(sl_2,\ell+1) & & & & V_{\mathbb{Z}\gamma}
\end{array}$$

これらの頂点作用素代数のうち $V_L, V_{L'}, V_{\mathbb{Z}\gamma}, V_{A_\ell}$ は格子から定義されるものであり，それらの性質はよく知られている．またアフィン頂点作用素代数 $V^{\mathrm{aff}} = L_{\widehat{sl}_2}(\ell+1,0)$ の性質もよく知られている．

$K(sl_2,\ell+1)$ は最も基本的なパラフェルミオン頂点作用素代数であり，[1, 4, 5] により C_2-有限性，有理性，既約加群の分類等が得られている．

M については，[9, 10] で詳しく調べられている．その主な性質は次のとおりである．なおここでは，A_ℓ 型ルート系および正ルート全体をそれぞれ $\Phi(A_\ell)$, $\Phi^+(A_\ell)$ で表し，$\alpha \in \Phi(A_\ell)$ に対して

$$w(\alpha) = \tfrac{1}{2}\alpha(-1)^2\mathbf{1} - (e^{\sqrt{2}\alpha} + e^{-\sqrt{2}\alpha}) \in V_{L'} \tag{2.3}$$

という記号を使う．$w(\alpha) = w(-\alpha)$ であることに注意する．

定理 2.1 ([9, 10])

(1) $\dim M_{(2)} = \frac{1}{2}\ell(\ell+1)$ で，$\{w(\alpha) \mid \alpha \in \Phi^+(A_\ell)\}$ は $M_{(2)}$ の基底である．

(2) M のイジング元全部の集合は $\{\frac{1}{4}w(\alpha) \mid \alpha \in \Phi^+(A_\ell)\}$ である．

(3) M は頂点作用素代数として $\{w(\alpha) \mid \alpha$ は A_ℓ 型単純ルート $\}$ で生成される．

(4) M の全自己同型群は $\ell+1$ 次対称群に同型である : $\mathrm{Aut}\, M \cong Sym_{\ell+1}$.

次の事実は C.H. Lam 氏に教えていただいた．

定理 2.2 M はレベル 2 の $sl_{\ell+1}$ 型パラフェルミオン頂点作用素代数 $K(sl_{\ell+1}, 2)$ と同型である.

上記の包含関係の図に現れる頂点作用素代数のうち V_L^τ, $V_{L'}^\tau$, M^τ の 3 個に関しては，$\ell = 1, 2$ の場合を除いて性質がわかっていない．$\ell \geq 3$ の場合に頂点作用素代数 V_L^τ, $V_{L'}^\tau$, M^τ の性質を調べたいのであるが，これは難しい問題と思われる．次節ではその最初のステップとして，M^τ のウエイト 2 の部分空間 $M_{(2)}^\tau$ を考察する.

なお [6] により，M の共形元は互いに直交する ℓ 個のヴィラソロ代数の極小系列に属するヴィラソロ元の和に分解されること，したがって

$$M \supset \mathcal{L}(c_1, 0) \otimes \mathcal{L}(c_2, 0) \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}(c_\ell, 0), \qquad c_i = 1 - \tfrac{6}{(i+2)(i+3)}$$

であることが知られており，[9] ではこれを用いて M の性質が調べられている．しかし，これらの極小系列に属する M のヴィラソロ元は自己同型 τ で固定されないので，τ によるオービフォールド M^τ を調べるためには，別の観点からの議論が必要である.

3 Griess 代数 $M_{(2)}^\tau$

前節の記号を踏襲する．M はウエイト空間の直和 $M = \oplus_{n\geq 0} M_{(n)}$ であるが，さらに $M_{(0)} = \mathbb{C}\mathbf{1}$, $M_{(1)} = 0$ である．したがって，$u, v \in M_{(2)}$ について $u_1 v \in M_{(2)}$ を u と v の積，$u_3 v \in M_{(0)} = \mathbb{C}\mathbf{1}$ を $u_3 v = (u|v)\mathbf{1}$ と表すことにより定まる $(u|v) \in \mathbb{C}$ を u と v の内積として，ウエイト 2 の部分空間 $M_{(2)}$ は Griess 代数になる.

定理 2.1 により $\{w(\alpha) \mid \alpha \in \Phi^+(A_\ell)\}$ は $M_{(2)}$ の基底であるが，この基底に関して Griess 代数における演算は次のように与えられる.

$$w(\alpha)_1 w(\beta) = \begin{cases} 8w(\alpha) & \text{if } \alpha = \beta \\ w(\alpha) + w(\beta) - w(\alpha \mp \beta) & \text{if } \langle \alpha, \beta \rangle = \pm 1 \\ 0 & \text{if } \langle \alpha, \beta \rangle = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

$$w(\alpha)_3 w(\beta) = \begin{cases} 4\mathbf{1} & \text{if } \alpha = \beta \\ \frac{1}{2}\mathbf{1} & \text{if } \langle \alpha, \beta \rangle = \pm 1 \\ 0 & \text{if } \langle \alpha, \beta \rangle = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

(2.2) 式で定義される τ による作用を記述するのに便利なように，α_i の添字 i を modulo $\ell + 1$ で考えることにする．$i \not\equiv j \pmod{\ell + 1}$ に対して，

$$\beta_{i,j} = \alpha_i - \alpha_j \in L' = \sqrt{2} A_\ell$$

とおく．$\beta_{i,j}$ は全部で $|\Phi(A_\ell)| = \ell(\ell+1)$ 個ある．また，同じく $i \not\equiv j \pmod{\ell+1}$ に対して，

$$w_{i,j} = \tfrac{1}{4}\beta_{i,j}(-1)^2\mathbf{1} - (e^{\beta_{i,j}} + e^{-\beta_{i,j}}) \in V_{L'} \tag{3.3}$$

とおく．なお，(2.3) 式による $w(\alpha)$ の定義においては $\langle\alpha,\alpha\rangle = 2$ であるが，(3.3) 式では $\langle\beta_{i,j},\beta_{i,j}\rangle = 4$ である．定理 2.1 により $\{w_{i,j} \,|\, 0 \le i < j \le \ell\}$ は M のウエイト 2 の部分空間 $M_{(2)}$ の基底である．$w_{i,j} = w_{j,i}$ であること，および i, j は modulo $\ell+1$ で考えることに注意する．

次に，頂点作用素代数 V_L の位数 $\ell+1$ の自己同型 τ の $M_{(2)}$ における固定点全体 $M^\tau_{(2)} = M^\tau \cap M_{(2)}$ を調べる．格子 L の自己同型として τ は $\{\beta_{i,j} \,|\, i \not\equiv j \pmod{\ell+1}\}$ 上の置換を引き起こし，τ による軌道は

$$\mathcal{O}_j = \{\beta_{p,j+p} \,|\, 0 \le p \le \ell\}, \qquad j \not\equiv 0 \pmod{\ell+1}$$

の ℓ 個である．それぞれの軌道は $\ell+1$ 個の元からなる．

τ はまた $\{w_{i,j} \,|\, 0 \le i < j \le \ell\}$ 上の置換を引き起こし，$\mathcal{O}_j$ に属する元に対応する $w_{i,j}$ の和

$$u^j = \textstyle\sum_{p=0}^{\ell} w_{p,j+p}, \qquad j \not\equiv 0 \pmod{\ell+1} \tag{3.4}$$

をとると，$u^j;\ j \not\equiv 0 \pmod{\ell+1}$ はベクトル空間 $M^\tau_{(2)}$ を張る．しかし，これらは線形独立ではない．実際，添字を modulo $\ell+1$ で考えることおよび $-\beta_{i,j} = \beta_{j,i}$ より，

$$-\mathcal{O}_j = \{\beta_{j+p,p} \,|\, 0 \le p \le \ell\} = \mathcal{O}_{\ell+1-j}$$

であり，$w_{i,j} = w_{j,i}$ と合わせて

$$u^j = u^{-j} = u^{\ell+1-j}, \qquad j \not\equiv 0 \pmod{\ell+1}$$

が成り立つ．

以上により，$M^\tau_{(2)}$ の基底について次のことがわかる．

定理 3.1 $\dim M^\tau_{(2)} = [\frac{\ell+1}{2}]$ である．より詳しく

(1) ℓ が偶数のとき：$u^1, \ldots, u^{\ell/2}$ は $M^\tau_{(2)}$ の基底である．

(2) ℓ が奇数のとき：$u^1, \ldots, u^{(\ell+1)/2}$ は $M^\tau_{(2)}$ の基底である．

(3.4) 式において ℓ が奇数のときの $u^{(\ell+1)/2}$ は，

$$u^{(\ell+1)/2} = 2\textstyle\sum_{p=0}^{(\ell-1)/2} w_{p,(\ell+1)/2+p}$$

という形になる．このため Griess 代数 $M^\tau_{(2)}$ における演算 $u^i{}_1u^j$ と $u^i{}_3u^j$ は，ℓ が奇数のときの $u^{(\ell+1)/2}$ が現れる場合に例外的な形になる．

M^τ の共形元は M の共形元

$$\omega = \tfrac{1}{\ell+3}\textstyle\sum_{0\le i<j\le\ell} w_{i,j}$$

に一致し，その中心電荷は $c(\omega)=\frac{\ell(\ell+1)}{\ell+3}$ である．u^j の定義 (3.4) より，ℓ が偶数のときは

$$\omega=\tfrac{1}{\ell+3}\textstyle\sum_{j=1}^{\ell/2}u^j$$

であり，また ℓ が奇数のときは

$$\omega=\tfrac{1}{\ell+3}\textstyle\sum_{j=1}^{(\ell-1)/2}u^j+\tfrac{1}{2(\ell+3)}u^{(\ell+1)/2}$$

である．

u^j の定義および (3.1) 式と (3.2) 式から，Griess 代数 $M^{\tau}_{(2)}$ の基底 $\{u^j\mid 1\le j\le[\frac{\ell+1}{2}]\}$ に関する演算は次のようになる．

定理 3.2 (1) $j\not\equiv 0,\ 2j\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \ell+1)$ に対して

$$u^j{}_1u^j=12u^j-2u^{2j},\qquad u^j{}_3u^j=5(\ell+1)\mathbf{1}$$

また ℓ が奇数のとき

$$u^{(\ell+1)/2}{}_1\,u^{(\ell+1)/2}=16u^{(\ell+1)/2},\qquad u^{(\ell+1)/2}{}_3\,u^{(\ell+1)/2}=8(\ell+1)\mathbf{1}$$

(2) $i\not\equiv 0,\ j\not\equiv 0,\ i\pm j\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \ell+1)$ に対して

$$u^i{}_1u^j=4u^i+4u^j-2u^{i-j}-2u^{i+j},\qquad u^i{}_3u^j=2(\ell+1)\mathbf{1}$$

特に $\ell=$ が奇数のとき，$\frac{1}{8}u^{(\ell+1)/2}$ は中心電荷 $\frac{\ell+1}{4}$ のヴィラソロ元である．

4　例

M^{τ} の共形元を互いに直交するヴィラソロ元の和として表すことに関して，ℓ の値が小さいときの計算結果を紹介する．ℓ の値が大きくなるにしたがって，M^{τ} のヴィラソロ元を分類することは困難になる．この節では，$\ell\le 7$ の範囲での結果を述べる．$\ell=6$ のときの結果は，横山和弘氏により計算機代数システム Risa/Asir を用いて得られものである．横山氏の方法により，$\ell=7,8,9$ 等の場合でも M^{τ} のヴィラソロ元をすべて求めることが可能である．

4.1　$\ell=1$ の場合

M^{τ} の中心電荷は $\frac{1}{2}$ で，そのウエイト 2 の部分空間 $M^{\tau}_{(2)}$ は 1 次元である．自己同型 τ は M に恒等写像として自明に作用し，

$$M=M^{\tau}\cong K(sl_2,2)\cong\mathcal{L}(\tfrac{1}{2},0)$$

である．特に，M^τ のヴィラソロ元は共形元だけである．格子の自己同型として τ は L' に -1 倍として作用するので，頂点作用素代数 $V_{L'}$ の自己同型としての τ は，格子 L' の -1 倍写像から引き起こされる $V_{L'}$ の位数 2 の自己同型であり，

$$V_{L'}^\tau = V_{L'}^+ \cong \mathcal{L}(\tfrac{1}{2},0)\otimes\mathcal{L}(\tfrac{1}{2},0)$$

が成り立つ．$\ell=1$ の場合は退化した場合といえる．

4.2 $\ell = 2$ の場合

M^τ の中心電荷は $\frac{6}{5}$ で，$M^\tau_{(2)}$ は 1 次元である．この場合の M^τ は [3] により中心電荷 $\frac{6}{5}$ の W_3-代数 $W_3(\frac{6}{5})$ に同型であることが知られている:

$$M^\tau \cong W_3(\tfrac{6}{5})$$

特に，M^τ のヴィラソロ元は共形元だけである．$W_3(\frac{6}{5})$ および $\ell=2$ のときの $V_{L'}^\tau$ については，C_2-有限性，有理性，Zhu 代数，既約加群の分類等の詳しい性質が [3] と [13] で調べられている．ちなみに $W_3(\frac{6}{5})$ の既約加群の同型類は 20 個であり，$V_{L'}^\tau$ の既約加群の同型類は 30 個である．

4.3 $\ell = 3$ の場合

M^τ の中心電荷は 2 で，$M^\tau_{(2)}$ は 2 次元である．$M^\tau_{(2)}$ の基底 $\{u^1,u^2\}$ に関して，$u^3 = u^{-1} = u^1$ に注意すると定理 3.2 より

$$u^1{}_1u^1 = 12u^1 - 2u^2, \qquad u^1{}_1u^2 = 4u^2, \qquad u^2{}_1u^2 = 16u^2$$

である．これらを用いると，u^1 と u^2 の線形結合 v で $v_1v = 2v$ を満たすものは

$$\begin{aligned} v^1 &= \tfrac{1}{6}u^1 - \tfrac{1}{24}u^2,\\ v^2 &= \tfrac{1}{8}u^2,\\ v^1+v^2 &= \tfrac{1}{6}u^1 + \tfrac{1}{12}u^2 \end{aligned}$$

の 3 個だけであることが確かめられる．v^1+v^2 は M^τ の共形元 ω であり，v^1 と v^2 は互いに直交するヴィラソロ元である．さらに，定理 3.2 より

$$u^1{}_3u^1 = 20\mathbf{1}, \qquad u^1{}_3u^2 = 8\mathbf{1}, \qquad u^2{}_3u^2 = 32\mathbf{1}$$

なので，$v^1{}_3v^1 = v^2{}_3v^2 = \frac{1}{2}\mathbf{1}$ となり，v^1 と v^2 はどちらも中心電荷 1 であることがわかる．v^1 と v^2 で生成される部分頂点作用素代数は 2 個の中心電荷 1 のヴィラソロ頂点作用素代数のテンソル積 $\mathcal{L}(1,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)$ に同型で，

$$M^\tau \supset \mathcal{L}(1,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)$$

である．

4.4 $\ell = 4$ の場合

M^τ の中心電荷は $\frac{20}{7}$ で，$M^\tau_{(2)}$ は 2 次元である．$M^\tau_{(2)}$ の基底 $\{u^1, u^2\}$ に関して，$u^{-1} = u^1$, $u^3 = u^2$, $u^4 = u^1$ に注意すると定理 3.2 より

$$u^1{}_1 u^1 = 12u^1 - 2u^2, \qquad u^1{}_1 u^2 = 2u^1 + 2u^2, \qquad u^2{}_1 u^2 = -2u^1 + 12u^2$$

である．これらを用いると，u^1 と u^2 の線形結合 v で $v_1 v = 2v$ を満たすものは，共形元 ω のほかに

$$v^1 = \tfrac{1}{42}(3 - \sqrt{21})u^1 + \tfrac{1}{42}(3 + \sqrt{21})u^2,$$
$$v^2 = \tfrac{1}{42}(3 + \sqrt{21})u^1 + \tfrac{1}{42}(3 - \sqrt{21})u^2$$

の 2 個だけであることが確かめられる．v^1 と v^2 は互いに直交するヴィラソロ元で，M^τ の共形元 ω はそれらの和 $v^1 + v^2$ に一致する．また定理 3.2 より

$$u^1{}_3 u^1 = 25\mathbf{1}, \qquad u^1{}_3 u^2 = 10\mathbf{1}, \qquad u^2{}_3 u^2 = 25\mathbf{1}$$

なので，v^1 と v^2 の中心電荷は $c(v^1) = c(v^2) = \frac{10}{7}$ であることがわかる．したがって，v^1 と v^2 で生成される部分頂点作用素代数は $\mathcal{L}(\frac{10}{7}, 0) \otimes \mathcal{L}(\frac{10}{7}, 0)$ に同型で，

$$M^\tau \supset \mathcal{L}(\tfrac{10}{7}, 0) \otimes \mathcal{L}(\tfrac{10}{7}, 0)$$

である．

4.5 $\ell = 5$ の場合

M^τ の中心電荷は $\frac{15}{4}$ で，$M^\tau_{(2)}$ は 3 次元である．$M^\tau_{(2)}$ の基底 $\{u^1, u^2, u^3\}$ の線形結合 v で $v_1 v = 2v$ を満たすものは，共形元 ω のほかに

$$v^1 = \tfrac{1}{8}u^1 - \tfrac{3}{40}u^2 + \tfrac{1}{16}u^3, \qquad v^2 = \tfrac{1}{8}u^3,$$
$$v^3 = \tfrac{1}{8}u^1 + \tfrac{1}{8}u^2 - \tfrac{1}{16}u^3, \qquad v^4 = \tfrac{1}{5}u^2$$

の 4 個だけであることが，定理 3.2 を用いて計算することにより確かめられる．中心電荷はそれぞれ $c(v^1) = \frac{27}{20}$, $c(v^2) = \frac{3}{2}$, $c(v^3) = \frac{9}{4}$, $c(v^4) = \frac{12}{5}$ である．v^1 と v^4，および v^2 と v^3 は互いに直交するヴィラソロ元で，共形元 ω は

$$\omega = v^1 + v^4 = v^2 + v^3$$

と互いに直交する 2 つのヴィラソロ元の和として，2 通りに表すことができる．

なお，$\ell = 5$ の場合は $u^4 = u^{-2} = u^2$ が成り立つので，定理 3.2 において $u^2{}_1 u^2 = 12u^2 - 2u^4 = 10u^2$ となり，$\frac{1}{5}u^2$ はヴィラソロ元であることに注意する．

4.6 $\ell = 6$ の場合

M^τ の中心電荷は $\frac{14}{3}$ で，$M^\tau_{(2)}$ は 3 次元である．$M^\tau_{(2)}$ の基底 $\{u^1, u^2, u^3\}$ の線形結合 v で $v_1 v = 2v$ を満たすものは，共形元 ω のほかに中心電荷 $\frac{28}{15}$ のヴィラソロ元が 3 個，中心電荷 $\frac{14}{5}$ のヴィラソロ元が 3 個の全部で 7 個であることが，定理 3.2 を用いて計算することにより確かめられる．さらに，3 個の中心電荷 $\frac{28}{15}$ のヴィラソロ元のうちの任意の 1 つ v^1 に対して，それと直交する中心電荷 $\frac{14}{5}$ のヴィラソロ元 v^2 が唯 1 つ存在して，$\omega = v^1 + v^2$ が成り立つ．すなわち，$M^\tau_{(2)}$ の共形元は互いに直交する 2 つのヴィラソロ元の和として，3 通りに表せる．

中心電荷 $\frac{28}{15}$ のヴィラソロ元 v^1 を u^1, u^2, u^3 の線形結合として $v^1 = a_1 u^1 + a_2 u^2 + a_3 u^3$ とおくと，係数 a_1, a_2, a_3 は次のように与えられる: a_1 は 3 次方程式

$$91125x^3 - 12150x^2 - 675x + 19 = 0$$

の解であり，a_2 と a_3 の値は a_1 から

$$\begin{aligned} 405a_1^2 - 36a_1 + 27a_2 - 4 &= 0, \\ 2025a_1^2 - 315a_1 - 135a_3 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

により定まる．なお，上記の 3 次方程式は異なる 3 個の無理数の解を持つ．

4.7 $\ell = 7$ の場合

M^τ の中心電荷は $\frac{28}{5}$ で，$M^\tau_{(2)}$ は 4 次元である．M^τ の共形元以外のヴィラソロ元の中心電荷は $\frac{8}{5}$, $\frac{18}{5}$, 2, 4, $\frac{14\pm\sqrt{6}}{5}$ の 6 個である．

$$\frac{28}{5} = \frac{8}{5} + 4 = \frac{18}{5} + 2 = \frac{14-\sqrt{6}}{5} + \frac{14+\sqrt{6}}{5}$$

が成り立つことに注意する．たとえば $\frac{1}{10}u^1 - \frac{1}{15}u^2 + \frac{1}{10}u^3 - \frac{1}{30}u^4$ は中心電荷 $\frac{8}{5}$ のヴィラソロ元である．

参考文献

[1] T. Arakawa, C.H. Lam and H. Yamada, Zhu's algebra, C_2-algebra and C_2-cofiniteness of parafermion vertex operator algebras, arXiv:1207.3909.

[2] P. Bantay, Characters and modular properties of permutation orbifolds, *Phys. Lett.* **B419** (1998), 175–178.

[3] C. Dong, C. H. Lam, K. Tanabe, H. Yamada and K. Yokoyama $\mathbb{Z}_3$ symmetry and W_3 algebra in lattice vertex operator algebras, *Pacific J. Math.* **215** (2004), $245 - 296$.

[4] C. Dong, C.H. Lam, Q. Wang and H. Yamada, The structure of parafermion vertex operator algebras, *J. Algebra* **323** (2010), 371–381.

[5] C. Dong, C.H. Lam and H. Yamada, W-algebras related to parafermion algebras, *J. Algebra* **322** (2009), 2366–2403.

[6] C. Dong, H.-S. Li, G. Mason and S. Norton, Associative subalgebras of the Griess algebra and related topics, in: *The Monster and Lie Algebras*, Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ. **7**, de Gruyter, Berlin, 1998, 27–42.

[7] C. Dong and Q. Wang, The structure of parafermion vertex operator algebras: general case, *Commun. Math. Phys.* **299** (2010), 783–792.

[8] I. B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Pure and Applied Math., Vol. 134, Academic Press, Boston, 1988.

[9] C.H. Lam and S. Sakuma, On a class of vertex operator algebras having a faithful S_{n+1}-action, *Taiwanese J. Math.* **12** (2008), 2465–2488.

[10] C.H. Lam, S. Sakuma and H. Yamauchi, Ising vectors and automorphism groups of commutant subalgebras related to root systems, *Math. Z.* **255** (2007), 597–626.

[11] J. Lepowsky and H.-S Li, *Introduction to Vertex Operator Algebras and Their Representations*, Progress in Math., Vol. 227, Birkhäuser, Boston, 2004.

[12] M. Miyamoto, Griess algebras and conformal vectors in vertex operator algebras, *J. Algebra* **179** (1996), 523–548.

[13] K. Tanabe and H. Yamada, The fixed point subalgebra of a lattice vertex operator algebra by an automorphism of order three, *Pacific J. Math.* **230** (2007), 469–510.